**به نام خدا**

**درس آمار و احتمال**
**نیم‌سال دوم ۰۱-۰۲**
**استاد: دکتر مطهری**

**دانشکده مهندسی کامپیوتر**

---

**کویز سوم**

---

۱. مختصات قطبی هر یک از نقاط به صورت $(\mathbf{1}, \theta_\mathbf{1}), (\mathbf{1}, \theta_\mathbf{2}), (\mathbf{1}, \theta_\mathbf{3})$ می به طوری که $\theta_i \sim unif(o, 2\pi)$ و $\theta_i$ مستقل هستند.

همچنین بدون کم شدن از کلیت مساله فرض کنید $\theta_1 = 0$ پس مختصات دکارتی هر کدام از نقاط به صورت زیر است

$$(1, 0), (cos(\theta_1), sin(\theta_1)), (cos(\theta_2), sin(\theta_2))$$

پس مساحت مثلث تشکیل شده از این نقاط به صورت زیر محاسبه می شود.

$$A = \frac{1}{2}\left|\left|\begin{matrix} 1 & 0 & 1 \\ \cos\theta_1 & \sin\theta_1 & 1 \\ \cos\theta_2 & \sin\theta_2 & 1 \end{matrix}\right|\right|$$

که به صورت زیر ساده می شود.

$$A = \frac{1}{2}\left|\left|\begin{matrix} \cos\theta_1 & \sin\theta_1 \\ \cos\theta_2 & \sin\theta_2 \end{matrix}\right| + \left|\begin{matrix} \sin\theta_1 & 1 \\ \sin\theta_2 & 1 \end{matrix}\right|\right|$$

$$A = \frac{1}{2}\left|cos(\theta_1)sin(\theta_2) - sin(\theta_1)cos(\theta_2) + \sin\theta_1 - \sin\theta_2\right|$$

$$A = \frac{1}{2}\left|\sin(\theta_2 - \theta_1) + \sin\theta_1 - \sin\theta_2\right|$$

همچنین با توجه به استقلال $\theta_1$ و $\theta_2$ می دانیم.

$$f(\theta_1, \theta_2) = f(\theta_1) \times f(\theta_2) = \frac{1}{(2\pi)^2}, \quad 0 \le \theta_1, \theta_2 \le 2\pi.$$

پس

$$E[A] = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} \left|\sin\theta_1 - \sin\theta_2 + \sin(\theta_2 - \theta_1)\right| \frac{d\theta_1 d\theta_2}{(2\pi)^2}.$$

که با توجه به این که حاصل انتگرال به صورت $\frac{3}{\pi}$ می باشد.

$$E[A] = \frac{1}{2} \times \frac{3}{\pi} = \frac{3}{2\pi}$$

۲. می دانیم که

$$P(A \mid B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}.$$

پس

$$F_{X|(a<X\leq b)}(x) = P(X \leq x \mid a < X \leq b).$$

$$F_{X|(a<X\leq b)}(x) = \frac{P(a < X \leq x)}{P(a < X \leq b)}.$$

با توجه به روابط CDF داریم.

$$P(a < X \leq x) = F_X(x) - F_X(a)$$

$$P(a < X \leq b) = F_X(b) - F_X(a)$$

پس می توانیم نتیجه بگیریم.

$$F_{X|(a<X\leq b)}(x) = \frac{F_X(x) - F_X(a)}{F_X(b) - F_X(a)}$$

پس CDF به صورت زیر است.

$$F_x(x) = \begin{cases} 0 & x \leq a \\ \frac{F_X(x)-F_X(a)}{F_X(b)-F_X(a)} & a < x < b \\ 1 & x \geq b \end{cases}$$

همچنین برای محاسبه pdf از رابطه بالا مشتق می گیریم.

$$f_{x,cond}(x) = \begin{cases} 0 & x \leq a \\ \frac{F_X(x)'}{F_X(b)-F_X(a)} & a < x < b \\ 0 & x \geq b \end{cases}$$

$$f_{x,cond}(x) = \begin{cases} 0 & x \leq a \\ \frac{f_X(x)}{F_X(b)-F_X(a)} & a < x < b \\ 0 & x \geq b \end{cases}$$